



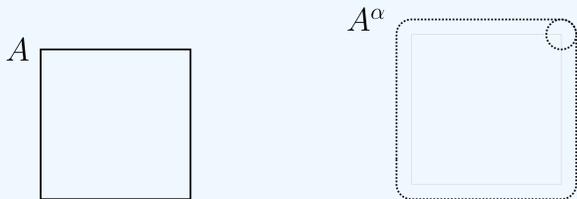
1. 概要

Levy-Prokhorov距離: 距離空間上の有限測度間の距離
弱収束の“距離づけ”

(X, d) を距離空間, $\mathcal{P} = \{X \text{ 上の有限測度}\}$, $\mu, \nu \in \mathcal{P}$

$$d_{\mathcal{P}}(\mu, \nu) = \inf\{\alpha > 0. \forall A \in \Sigma_X. \mu(A) \leq \nu(A^\alpha) + \alpha \wedge \nu(A) \leq \mu(A^\alpha) + \alpha\}$$

ただし, $A^\alpha = \bigcup_{x \in A} \text{ball}(x, \alpha)$. $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ は距離空間となる.



本研究の形式化

- ▶ 測度の弱収束(フィルターで一般化されたPortmanteau定理)
- ▶ 測度の弱収束位相空間
- ▶ Levy-Prokhorov距離とその性質
- ▶ Prokhorovの定理と必要な補題: Rieszの表現定理, Alaogluの定理
 - ▶ Prokhorovの定理: 測度列に対する収束部分列の存在性の証明に用いられる中心極限定理, 最適カップリングの存在定理(最適輸送理論), Sanovの定理等
 - ▶ Rieszの表現定理: 正線型汎函数を積分表示
本の証明[Rudin, 1987]: 9ページ, Isabelle: 約2,100行
- ▶ 標準ボレル空間上の有限測度がなす可測空間が標準ボレル空間
 - ▶ よい性質を持つ可測空間のクラス
標準ボレル空間理論, Disintegration定理などで用いられる

2. 準備

Isabelle/HOLでの距離空間

- ▶ 型クラス版[Hölzl et.al., ITP2013]: 型全体上の距離
- ▶ 集合版[Paulson, 2023]: 集合+距離関数
本研究は集合版を利用

Isabelle/HOLでの収束

フィルターによる一般化

$(\square \rightarrow \square) \square \text{ in } \square :: (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha \text{ filter} \Rightarrow \beta \text{ topology} \Rightarrow \text{bool}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff (x_n \longrightarrow x) \text{ sequentially in } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff (f \longrightarrow L) \text{ (at } a) \text{ in } \mathbb{R}$$

(位相空間が明らかな場合はin以降を省略)

3. 測度の弱収束

フィルターで一般化. 証明は $F = \text{sequentially}$ の時と同じ流れ

測度の弱収束

$$(\mu_i \Rightarrow_{\text{wc}} \mu) F \iff \forall f \in C_b(X). (\int f d\mu_i \longrightarrow \int f d\mu) F$$

弱収束の同値な条件(Portmanteauの定理)を形式化した.

測度の弱収束位相: \mathcal{O}_{wc}

$\forall f \in C_b(X). (\lambda\mu. \int f d\mu) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続になるような最弱の位相

$$\text{定理: } (\mu_i \longrightarrow \mu) F \text{ in } (\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\text{wc}}) \iff (\mu_i \Rightarrow_{\text{wc}} \mu) F$$

7. 関連研究・参考文献

▶ Isabelle/HOL

\mathbb{R} 上確率測度列についての弱収束

\mathbb{R} 上の確率測度についてProkhorovの定理(1)の形

▶ Lean

弱収束, 弱収束位相, Rieszの表現定理

Levy-Prokhorov距離は現在形式化されている最中

▶ PVS, Mizar

Rieszの表現定理(の原型バージョン)

4. Levy-Prokhorov距離

```
locale Levy_Prokhorov = Metric_space +
  fixes P
  defines "P ≡ {N. sets N = sets (borel_of mtopology) ∧ finite_measure N}"
begin

definition LPm :: "'a measure ⇒ 'a measure ⇒ real" where
"LPm N L ≡ if N ∈ P ∧ L ∈ P then (∏ {e. e > 0 ∧ (∀A∈sets (borel_of mtopology).
  measure N A ≤ measure L (∪{a∈A. mball a e}) + e
  ∧ measure L A ≤ measure N (∪{a∈A. mball a e}) + e})}
  else 0"
```

sublocale LPm: Metric_space P LPm

定理: $(\mu_i \longrightarrow \mu) F \text{ in } (\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}}) \implies (\mu_i \Rightarrow_{\text{wc}} \mu) F$

定理: X が可分の時, $(\mu_i \Rightarrow_{\text{wc}} \mu) F \implies (\mu_i \longrightarrow \mu) F \text{ in } (\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$

系: X が可分の時, $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}}) = (\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\text{wc}})$

収束の同値性をフィルターで一般化したので, 開(閉)集合の収束による特徴づけを使うことができる.

定理: X が可分なら $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$ も可分

定理: X が可分完備なら $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$ も可分完備(要Prokhorovの定理)

5. Prokhorovの定理

$\Gamma(\subseteq \mathcal{P})$ が緊密 $\iff \forall \varepsilon > 0. \exists K : \text{compact}. \forall \mu \in \Gamma. \mu(X - K) < \varepsilon$

$r \geq 0, \mathcal{P}_r = \mathcal{P} \cap \{\mu. \mu(X) \leq r\}, \Gamma \subseteq \mathcal{P}_r$ とする

Prokhorovの定理: X が可分完備の時以下は同値

1. Γ が相対コンパクト

2. Γ が緊密

「2ならば1」は以下の形で使える. (完備性必要なし)

$$\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}(\subseteq \mathcal{P}_r) \text{が緊密} \implies \exists \mu_{n_k} : \text{部分列}, \exists \mu. (\mu_{n_k} \Rightarrow_{\text{wc}} \mu) \text{ sequentially} \quad (1)$$

必要な補題: Rieszの表現定理

X :コンパクトハウスドルフ, 正線型汎函数: $\varphi : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$

i.e. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \wedge (f \geq 0 \implies \varphi(f) \geq 0)$

とすると一意な測度 ν があって以下が成立.

$$\forall f \in C(X). \varphi(f) = \int f d\nu$$

必要な補題: Alaogluの定理

Y : 内積ベクトル空間, Y^* : 双対空間

$B^* = \{\varphi \in Y^*, \|\varphi\| \leq r\}$ は弱*-コンパクト

欲しい形の証明には集合版ベクトル空間が必要

Isabelle/HOLの集合版ベクトル空間ライブラリは小さい

$Y = C(X)$ の場合のみ証明

6. 標準ボレル空間

\mathcal{P} 上の σ -代数: $\Sigma_{\mathcal{P}}$

$\forall A \in \Sigma_X. (\lambda\mu. \mu(A)) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ が可測になるような最弱の σ -代数

$\mathcal{P}_{\text{sprob}} = \mathcal{P} \cap \{\text{劣確率測度}\}, \mathcal{P}_{\text{prob}} = \mathcal{P} \cap \{\text{確率測度}\}$

$\mathcal{P}_{\text{sprob}}$ や $\mathcal{P}_{\text{prob}}$ は(劣)マルコフ核の定義でも使われる

定理: X が可分完備なら $\Sigma_{\mathcal{P}} = \sigma[\mathcal{O}_{\text{wc}}]$

Levy-Prokhorov距離を用いた証明を与えた

系: X が標準ボレル空間なら $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\text{sprob}}, \mathcal{P}_{\text{prob}}$ も標準ボレル空間

標準ボレル空間: 可分で完備な距離づけ可能位相空間に生成されるボレル空間

1. W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill; 3rd edition, 1987.
2. J.Hölzl, F.Immler, B. Huffman, *Type Classes and Filters for Mathematical Analysis in Isabelle/HOL*, ITP2013, Springer Berlin Heidelberg.
3. L.C.Paulson, *Porting the HOL Light metric space library*, https://lawrencecpaulson.github.io/2023/07/12/Metric_spaces.html, 2023, Accessed: December 31, 2023.
4. O.Gaans, *Probability Measures on Metric Space*, <https://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/janco11.pdf>, Accessed: March 2, 2023.
5. C.E.Heil, *Alaoglu's Theorem*, <https://heil.math.gatech.edu/6338/summer08/section9f.pdf>, Lecture note on MATH 6338 (Real Analysis II) at Georgia Insitute of Technology, 2008, Accessed: January 5, 2024

謝辞: 本研究はJSPS科研費23KJ0905の助成を受けたものです.